TENSEURS

Dans le calcul tensoriel, on veut exprimer la façon dont se transforment dans un changement de base les composantes des éléments d'un espace vectoriel et d'un produit d'espace vectoriel.

En fait, on recherche systématiquement les valeurs *intrinsèques*. On exprimera des relations qui seront indépendantes du système de coordonnées utilisé pour les expliciter. En effet, seules ces relations pourront exprimer une réalité physique. La puissance galiléenne d'une force ne peut en aucun cas être dépendante du repère de calcul choisit.

Convention d'écriture

Déjà dans un seul espace vectoriel à dimension peu élevée, le formulaire de changement de base est lourd. On conçoit donc des difficultés d'écriture pour des cas un peu complexes. Il est important de condenser les écritures afin les rendre plus maniables.

Convention d'Einstein

Souvent nous devrons exprimer des sommes de monômes. L'habitude veut qu'alors on utilise des indices de valeurs variables. La variation de ces indices est essentiellement fonction de la dimension de l'espace vectoriel concerné.

La convention d'Einstein permet une simplification supplémentaire.

> Tout monôme où certains indices littéraux figurent chacun deux fois, en position supérieure dans un facteur et en position inférieure dans un autre, représente la somme de tous les monômes analogues, avec chacun de ces indices répétés prenant *n* valeurs.

Un indice répété est appelé *indice muet*.

$$u^i v_i = \sum_{i=1}^{n} u^i v_i = u^1 v_1 + u^2 v_2 + \cdots + u^n v_n$$

$$a_{ij} x^i y^j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j$$

Un indice non muet est dit *libre*.

> Toute égalité où figurent certains indices libres, à la même hauteur aux deux membres, s'entendra comme valables pour toutes les valeurs de 1 à *n* de ces indices.

Une telle équation représentera en réalité un système de n^p égalités si elle comporte *p* indices libres.

$$a_i^h x^i = y^h \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a_3^1 x^3 = y^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 = y^2 \\ a_1^3 x^1 + a_2^3 x^2 + a_3^3 x^3 = y^3 \end{cases} \text{pour} n=3$$

<u>Remarques</u>

* L'emploi d'indices supérieurs peut créer un risque de confusion avec l'écriture des puissances. Aussi en écriture indicielle, on convient d'une notation particulière pour les puissances. On désignera par a^{p} la $p^{ième}$ puissance de a.

* Un monôme reste inchangé lorsqu'on change la lettre qui désigne un indice muet:

$$u_i v^i = u_h v^h \quad a_i^j x_j y^i = a_l^m y^l x_m \quad \alpha_{ijk} x^i y^j \neq \alpha_{lmn} x^l y^m \quad \omega_{ij}^k x^i v^j \neq \omega_{lm}^n x^m v^l$$

* Pour désigner un monôme par une lettre unique, on devra la munir des mêmes indices libres que le monôme :

$$u_i v^i = p \quad a_i^j x_j y^i = f \quad \alpha_{ijk} x^i y^j = w_k \quad \lambda_{lm}^{opq} x_o^i \delta_i^l = \gamma_m^{pq}$$

* Il est impératif de ne pas tripler les indices muets. En effet, l'écriture $a_i^j x_j y^j$ n'a aucun sens, les écritures $a_i^j x_j y^l$ et $a_i^l x_j y^j$ ayant chacune un sens différent.

* Si on veut dire $a^i b_j$ est égal à 1 si i est égal à j, il faut écrire :

$$a^i b_j = 1 \quad \text{si} \quad i = j$$

En effet, la formule condensée $a^i b_i = 1$ représente tout autre chose.

Règles de calcul

Dans la convention d'Einstein, on peut traiter les opérations suivant les règles de calcul des opérateurs utilisés. On obtient ainsi :

Les additions sont associatives et commutatives. Les multiplications sont associatives et distributives, à droite comme à gauche, par rapport aux additions.

$$p^i = a_j^i x^j \quad q^i = b_j^i x^j \quad r^i = \alpha_l^i \beta_j^l x^j \quad t_{jk} = c_{jh} y_k^h$$

$$\Rightarrow s^i = p^i + q^i + r^i = a_j^i x^j + b_j^i x^j + \alpha_l^i \beta_j^l x^j = (a_j^i + b_j^j + \alpha_l^i \beta_j^l) x^j$$

$$\Rightarrow p^i t_{jk} = a_m^i x^m c_{jh} y_k^h = \left(\sum_{m=1}^{n} a_m^i x^m \right) . \left(\sum_{h=1}^{n} c_{jh} y_k^h \right)$$

$$p^i t_{ik} = a_m^i x^m c_{ih} y_k^h = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} a_m^i x^m c_{ih} y_k^h \right) = \sum_{i=1}^{n} p^i t_{ik} = u_k$$

<u>Remarques</u>

* Le calcul formel ne permet pas toutes les opérations classiques. En particulier, les opérations de simplifications par division doivent être menées avec précautions.

$$\left. \begin{array}{r} a_i x^i = b \\ a_i \neq 0 \end{array} \right\} \nRightarrow x^i = \frac{b}{a_i}$$

* Les règles de calcul nécessitent d'être très rigoureux sur l'emploi des indices. En effet, il ne faut pas confondre le produit $u^i x_i$ par w^i qui est représenté par $u^l x_l w^i$ avec le produit de u^i par $x_i w^i$ qui est représenté par $u^i x_l w^l$.

Applications aux matrices

Pour une matrice carrée *A* à *n* lignes et *n* colonnes, nous désignerons souvent par a^i_j au lieu de a_{ij} le terme représentant l'élément de la ligne i et de la colonne j. On utilisera ainsi la convention de notation o-li-ba-co (haut=ligne, bas=colonne). Nous écrirons donc :

$$A = \left(a^i_j\right)$$

Pour l'expression du déterminant, on aura :

$$\mathrm{Det}(A) = \left|a^i_j\right|$$

Avec ces notations, le produit de deux matrices s'exprime très facilement :

$$AB = C \Leftrightarrow a^i_j b^j_k = c^i_k$$

En particulier, si les deux matrices sont inverses l'une de l'autre, le produit doit nous donner la matrice identité :

$$AB = I \Leftrightarrow a^i_j b^j_k = \delta^i_k$$

On voit ainsi apparaître le symbole de KRONECKER :

$$\delta^i_k = \delta_{ik} = \delta^{ik} = \begin{cases} 1 \,\mathrm{si}\, i = k \\ 0 \,\mathrm{si}\, i \neq k \end{cases}$$

On peut pressentir la résolution d'un système :

$$a^i_j x^j = y^i \quad \Leftrightarrow \quad x^j = b^j_i y^i$$

Le calcul du déterminant permet de faire apparaître le pseudo-tenseur de LEVI-CIVITA appelé parfois le deuxième symbole de KRONECKER :

$$\mathrm{Det}(A) = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n = \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} a^1_{i_1} a^2_{i_2} \cdots a^n_{i_n}$$

avec :

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} 0 \text{ si deux des indices sont égaux} \\ 1 \text{ si } i_1, i_2, \cdots, i_n \text{ est une permutation paire de } 1,2,\cdots,n \\ -1 \text{ si } i_1, i_2, \cdots, i_n \text{ est une permutation impaire de } 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

En fait on peut obtenir aussi des écritures intéressantes en faisant intervenir les cofacteurs des éléments de la matrice *A*. En notant Δ^i_j ($\Delta^i_j = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$) le cofacteur de a^i_j , on a :

$$\Delta^i_j a^j_k = \delta^i_k \,\mathrm{Det}(A)$$

Si le déterminant de la matrice *A* est non nul, on peut retrouver les éléments de la matrice *B* inverse de *A* :

$$b^i_j = \frac{\Delta^i_j}{\mathrm{Det}(A)} \quad \Delta^i_j = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

La valeur du déterminant devient :

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} a^j_i \Delta^i_j = \sum_{j=1}^{n} a^j_i \Delta^i_j$$

Application aux formes quadratiques

Considérons la forme quadratique, à coefficients symétriques ($a_{ij} = a_{ji}$), définie par :

$$g(x) = a_{ij} x^i x^j$$

Les termes a_{ij} sont des constantes scalaires, et les x^i sont des variables scalaires à produits commutatifs. Cette commutativité permet d'écrire tout terme du type $2a_{12}x^1x^2$ comme la somme $a_{12}x^1x^2 + a_{21}x^1x^2$.

Le calcul de la différentielle de la forme quadratique nous donne :

$$dg = a_{ij}\left(x^i dx^j + x^j dx^i\right)$$

En jouant sur la permutation des indices muets et la symétrie de la forme quadratique, on peut écrire :

$$a_{ij} x^i dx^j = a_{ji} x^j dx^i = a_{ij} x^j dx^i$$

Ce qui nous donne :

$$dg = 2a_{ij} x^j dx^i$$

On peut ainsi obtenir la dérivée partielle de la forme quadratique par rapport à la variable x^i :

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = 2a_{ij} x^j$$

La notation de cette dérivée partielle peut être aussi abrégée :

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = g_{,i} = 2a_{ij} x^j$$

Le calcul précédent permet de retrouver l'identité d'Euler pour les fonctions homogènes de degré 2 :

$$x^i g_{,i} = 2g$$

Espaces vectoriels affines. Espaces vectoriels métriques

Les propriétés des tenseurs seront très différentes suivant la nature des espaces dans lesquels ils seront définis. L'usage impose de distinguer deux cas : l'espace vectoriel affine et l'espace métrique qui contient les espaces vectoriels euclidien. La distinction est importante car si certaines formules tensorielles prennent des formes simples dans un espace euclidien, il est parfois nécessaire d'employer des espaces vectoriels affines.

Espaces vectoriels affines

Dans ce type d'espace, on admet les postulats qui permettent de définir des vecteurs. L'espace à *n* dimensions comportera *n* axes de coordonnées ayant à priori chacun une unité particulière. Un vecteur arbitraire $\vec{v}$ sera représenté par ses composantes $v^1, v^2, \cdots, v^n$ suivant les différents axes sur lesquels nous aurons au préalable défini des unités $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$.

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i$$

La longueur absolue du vecteur $\vec{v}$ ne peut pas être définie puisqu'il n'y a aucune commune mesure entre les différentes composantes $v^1, v^2, \cdots, v^n$. La distance de deux points ne peut pas être mesurée.

De prime abord, ces notions surprennent et on comprend mal l'utilité de ce type d'espace. Toutefois en physique on fait souvent usage de figures ou de diagrammes tracés en géométrie affine.

En thermodynamique par exemple, on trace des diagrammes d'états faisant intervenir les variables pression, volume et température. Pour le mécanicien, la loi de comportement d'un matériau peut parfois être représenté dans un espace affine des variables contraintes et déformations.

Dans un espace affine, c'est une pure convention que de tracer des axes orthogonaux. En effet, si on ne peut pas définir une longueur, il est impossible de parler d'angle.

Dans ce type d'espace, une fonction $x^2 = f\left(x^1\right)$ se représentera par une courbe. Mais, suivant les conventions d'unités et d'axes, cette courbe se déformera. Par contre certaines relations conserveront un sens invariant. Ainsi en thermodynamique, une loi d'évolution d'un gaz peut être représentée dans le diagramme de Clapeyron (pression, volume). Ce diagramme représente évidemment un espace affine, mais pour une évolution quelconque, le produit des variables pression-volume représente une énergie qui doit être indépendante du mode de représentation utilisé.

C'est en jouant sur cette notion importante d'invariant que le mécanicien trouve certaines formules de loi de comportement d'un matériau.

Espaces vectoriels métriques

En géométrie métrique, on ajoute une condition supplémentaire, qui permet de définir la distance entre deux points ou la longueur d'un vecteur. Dans le cas le plus simple, celui de l'espace euclidien, on se défini un repère orthogonal, dont les vecteurs ont tous un même module égal à une unité choisie arbitrairement. On peut ensuite construire une infinité d'autres repères rectilignes ou curvilignes, au moyen d'un changement de coordonnées. Dans ce changement, toute longueur doit rester invariante. Bien entendu, la notion de longueur permettra ensuite de définir la notion d'angle.

Le problème associé à l'algèbre tensorielle, c'est que nous ne commençons pas par ce type de géométrie, contrairement à ce qui est fait en géométrie élémentaire. Cette algèbre tensorielle, bien plus générale que la petite géométrie d'arpentage a la prétention de devenir la géométrie générale de la physique, en généralisant les phénomènes physiques.

Espaces vectoriels mixtes

Entre les deux cas purs (affine et métrique), il convient de noter qu'il existe des espaces mixtes, qui seraient affines vis-à-vis de certaines coordonnées et métriques pour d'autres. Ainsi la représentation d'une répartition de pression sur une surface peut être représentée dans un espace $\left(p, x^1, x^2\right)$. Cet espace est métrique dans le plan $\left(x^1, x^2\right)$ mais pas dans les autres plans.

Algèbre tensorielle en espace affine

Contravariance

Soit E_n un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\boldsymbol{K}$ de scalaires. Dans la suite du cours, nous considérerons que la dimension de E_n est finie et que le corps $\boldsymbol{K}$ est commutatif.

Dans ce chapitre, nous supposerons que E_n est doté simplement d'une structure affine. C'est-à-dire que , outre l'égalité, les seules relations envisagées entre les éléments de E_n seront l'addition et la multiplication par un scalaire.

Soit $(\vec{e}_i)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n)$ une base de E_n. Un vecteur $\vec{v}$ quelconque de E_n est alors une combinaison linéaire des vecteurs de la base :

$$\vec{v}=v^i\vec{e}_i$$

Soit $(\vec{E}_I)$ une nouvelle base de E_n. On aura alors de nouvelles composantes pour $\vec{v}$:

$$\vec{v}=V^I\vec{E}_I$$

D'autre part, la nouvelle base est reliée à l'ancienne par les formules de changement de base et la matrice *A* associée :

$$\vec{E}_I=a_I^j\vec{e}_j$$

Ce qui nous donne :

$$v^i=a_I^iV^I$$

Mais de plus la matrice de changement de base est inversible et on peut lui associer son inverse *B* :

$$B=A^{-1}=(b_i^I)$$

On aura donc :

$$\vec{e}_i=b_i^I\vec{E}_I \qquad \text{et} \qquad V^I=b_i^Iv^i$$

Les formules précédentes amènent la remarque suivante :

Alors que la nouvelle base a été définie en fonction de l'ancienne à l'aide des éléments de la matrice *A*, les nouvelles composantes du vecteur s'expriment en fonction des anciennes à l'aide de la matrice inverse *B*.

On exprime ce fait en disant que les composantes d'un vecteur de E_n sont **contravariantes** dans un changement de base sur cet espace. On dit qu'un vecteur de E_n est un <u>tenseur contravariant du premier ordre</u> sur E_n.

<u>Remarque :</u> Pour plus de clarté dans les formules, nous avons employé des lettres majuscules pour tout ce qui se rapporte au second système de coordonnée, même pour les indices. Il est évident que ce genre de notation ne pourra être maintenu dans la suite où nous pourrons être amené à considérer plusieurs changements de base consécutif.

<u>Forme linéaire et covariance</u>

Dans le chapitre portant les espaces vectoriels nous avons défini les applications linéaires.

Nous appellerons *forme linéaire* toute application linéaire de E_n sur le corps des scalaires *K*.

Une telle forme linéaire est donc un opérateur du type :

$$\vec{v}\in E_n\mapsto f(\vec{v})\in K$$

La notion de linéarité imposant :

$$f(\alpha\vec{v}+\beta\vec{u})=\alpha f(\vec{v})+\beta f(\vec{u})$$

On obtient donc dans une base $(\vec{e}_i)$:

$$f(\vec{v})=f(v^i\vec{e}_i)=v^i f(\vec{e}_i)=v^i f_i$$

On constate que $f(\vec{v})$ apparaît comme une combinaison linéaire des v^i. Toutefois, d'après sa définition, l'expression $v^i f_i$ représente un scalaire *intrinsèque*, c'est à dire indépendant de la base $(\vec{e}_i)$ utilisée dans E_n.

De fait, un changement de base $(\vec{e}_i) \mapsto (\vec{E}_I)$ nous conduit aux relations :

$$f(\vec{v}) = v^i f_i = V^I F_I \qquad \text{avec} \qquad F_I = f(\vec{E}_I) = f(a_I^i \vec{e}_i) = a_I^i f(\vec{e}_i) = a_I^i f_i$$

On obtient aussi :

$$f_i = b_i^I F_I$$

Ces formules nous montrent que les coefficients f_i de notre forme linéaire varient dans le même sens que les vecteurs de base dans un changement de base. Nous dirons qu'ils sont **covariants** dans un changement de base.

On peut remarquer la notation employée. Arbitrairement, les vecteurs de base sont notés avec des indices inférieurs. Les vecteurs contravariants ont donc des indices supérieurs, alors que les coefficients covariants sont notés aces des indices inférieurs. Ce type de notation est celui que nous allons employer dans la suite.

Espace dual

Considérons l'ensemble des formes linéaires sur E_n. Nous admettons que muni des lois de composition suivantes, cet ensemble est un espace vectoriel :

Addition de deux formes linéaires $\quad s = f + g \iff \forall \vec{v} \in E_n \quad s(\vec{v}) = f(\vec{v}) + g(\vec{v})$

Produit d'une forme linéaire par un scalaire $\quad p = \lambda f \iff \forall \vec{v} \in E_n \quad p(\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$

On admet la notion d'égalité entre deux formes linéaires :

$$g = f \iff \forall \vec{v} \in E_n \quad g(\vec{v}) = f(\vec{v})$$

On aura en particulier la forme nulle :

$$f = O \iff \forall \vec{v} \in E_n \quad f(\vec{v}) = O$$

> L'ensemble des formes linéaires sur *K* est un espace vectoriel appelé *espace dual de* E_n noté $E_n^{\times}$.

Recherche d'une base de $E_n^{\times}$

$E_n^{\times}$ étant un espace vectoriel, on peut toujours définir une base de cet espace vectoriel. Toutefois nous allons rechercher une base particulière de $E_n^{\times}$ présentant des propriétés simples et rendant les calculs plus commodes.

Considérons comme éléments particuliers de $E_n^{\times}$ les *n* formes linéaires définies par :

$$e^{*i}(\vec{e}_j) = \delta_j^i$$

On démontre sans difficulté que pour toute forme linéaire *f* on a :

$$f = f_i e^{*i}$$

De plus la suite (e^{*i}) est libre. De fait elle constitue une base de $E_n^{\times}$. Ce qui nous amène aux conclusions suivantes :

> L'espace $E_n^{\times}$ dual de E_n a la même dimension que E_n.
>
> Il admet la base (e^{*i}) appelée base duale de la base $(\vec{e}_i)$ de E_n.
>
> Les coefficients d'une forme linéaire *f*, relativement à la base $(\vec{e}_i)$ de E_n ne sont que les composantes de *f* suivant la base (e^{*i}) de $E_n^{\times}$.

Dual de l'espace dual

En recherchant l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel $E_n^{\times}$, on obtient un espace vectoriel de dimension *n* qui par correspondance peut être assimilé à l'espace vectoriel E_n lui-même. La dualité est une relation réciproque. Dans la dualité, la covariance devient la contravariance si nous adoptons $E_n^{\times}$ au lieu de E_n comme espace initial. Il est alors évident que les notions de variance seront étroitement dépendantes de l'espace vectoriel initial.

Multiplication tensorielle

Soient E_n et E'_m deux espaces vectoriels, distincts ou non, de dimensions finies *n* et *m* sur le même corps commutatif *K* de scalaires.

On rappelle que l'ensemble des couples $(\vec{V}, \vec{V}')$ tels que $\vec{V} \in E_n$ et $\vec{V}' \in E'_m$ est noté $E_n \times E'_m$.

> On appelle *produit tensoriel de* E_n *par* E'_m et on le note $E_n \otimes E'_m$, un troisième espace vectoriel de dimension *nm* sur le corps *K* muni d'une application de $E_n \times E'_m$ dans $E_n \otimes E'_m$ satisfaisant aux propriétés ci-après :
> * La multiplication tensorielle est distributive, à droite comme à gauche, par rapport à l'addition .
> * La multiplication tensorielle est associative avec la multiplication par un scalaire.
> * Si *p* vecteurs $\vec{V}$ sont linéairement indépendants et si *q* vecteurs $\vec{V}'$ le sont aussi, alors les produits $\vec{V} \otimes \vec{V}'$ sont linéairement indépendants.

A partir d'une telle loi de composition, il est possible d'établir une table d'opération. Considérons $(\vec{e}_i)$ [resp. $(\vec{e}'_j)$] une base de E_n [resp. de E'_m]. D'après la troisième propriété, on obtient une base de $E_n \otimes E'_m$ en formant les *nm* produits : $\pi_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}'_j$ avec i = 1,2, ... , *n* et j = 1,2, ... , *m*

Cette base (π_{ij}) est appelée *base associée* dans $E_n \otimes E'_m$ aux bases $(\vec{e}_i)$ de E_n et $(\vec{e}'_j)$ de E'_m.

L'élément générique de $E_n \otimes E'_m$ est défini par :

$$\forall \vec{V} = v^i \vec{e}_i \in E_n, \forall \vec{V}' = v'^j \vec{e}'_j \in E'_m \Rightarrow T = t^{ij} \pi_{ij} = \vec{V} \otimes \vec{V}' = v^i v'^j \vec{e}_i \otimes \vec{e}'_j = v^i v'^j \pi_{ij} \in E_n \otimes E'_m$$

Propriétés

1- Avec les propriétés de définition, on peut dire que la multiplication tensorielle des éléments de E_n par les éléments de E'_m est une application bilinéaire de $E_n \times E'_m$ dans $E_n \otimes E'_m$.

Attention, il faut bien distinguer une application dans $E_n \otimes E'_m$ et non pas une application sur $E_n \otimes E'_m$. En effet, dans le cas général on ne peut pas associer un couple $(\vec{V}, \vec{V}')$ de $E_n \times E'_m$ à tout élément t^{ij} de $E_n \otimes E'_m$. Ceci nous conduirait à rechercher *n+m* inconnues (v^i, v'^j) par partir de *nm* équations $(v^i v'^j = t^{ij})$.

Ainsi l'ensemble des produits $\vec{V} \otimes \vec{V}'$ n'est en général qu'une partie de $E_n \otimes E'_m$. On dit que les $\vec{V} \otimes \vec{V}'$ sont les *éléments décomposés* de $E_n \otimes E'_m$.

2- Le produit tensoriel de deux vecteurs n'est pas commutatif en général. Considérons en effet la multiplication tensorielle d'un élément de E_n par un élément de E'_m. Il faut tout d'abord noter que le problème de la commutativité ne peut se poser que si les deux espaces sont identiques. Dans ce cas, le produit $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ est distinct du produit $\vec{e}_j \otimes \vec{e}_i$ puisque les deux éléments π_{ij} et π_{ji} appartiennent à une base de $E_n \otimes E_n$.

Définition générale des tenseurs

On remarque que la définition de la multiplication tensorielle permet un calcul en cascade. En effet la multiplication tensorielle de deux espaces vectoriels E_n et E'_m nous donne un troisième espace vectoriel $E_n \otimes E'_m$. Ce dernier peut à nouveau servir à la définition d'un espace vectoriel $(E_n \otimes E'_m) \otimes E''_o$ à partir d'un espace vectoriel E''_o. On imagine aisément la généralisation qui peut être faite.

Toutefois, afin d'éviter des difficultés complémentaires, nous imposerons une quatrième propriété à la multiplication tensorielle.

La multiplication tensorielle des éléments de plusieurs espaces vectoriels est associative.

Pour assurer cette associativité, il suffit de se l'imposer sur les vecteurs de base.

$$\vec{e}_i \otimes (\vec{e}'_j \otimes \vec{e}''_k) = (\vec{e}_i \otimes \vec{e}'_j) \otimes \vec{e}''_k = \vec{e}_i \otimes \vec{e}'_j \otimes \vec{e}''_k$$

On peut donc maintenant donner une définition générale des tenseurs.

Nous appellerons *tenseurs sur* $E_n \times E'_m \times E''_m$, tout élément de l'espace vectoriel $(E_n \otimes E'_m) \otimes E''_o = E_n \otimes E'_m \otimes E''_o$.

L'expression générale de ces tenseurs est donc :

$$\mathbb{T} = t^{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}'_j \otimes \vec{e}''_k$$

Les termes t^{ijk} représentent les composantes de $\mathbb{T}$ suivant la base $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}'_j \otimes \vec{e}''_k)$. Il est évident que ces composantes sont fonctions des bases.

Considérons les changements de base suivants :

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_I &= a_I^i \vec{e}_i \\ \vec{E}'_J &= a'^j_J \vec{e}'_j \\ \vec{E}''_K &= a''^k_K \vec{e}''_k \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \vec{e}_i &= b_i^I \vec{E}_I \\ \vec{e}'_j &= b'^J_j \vec{E}'_J \\ \vec{e}''_k &= b''^K_k \vec{E}''_K \end{aligned}\right.$$

Dans la nouvelle base, les composantes T^{IJK} du tenseur $\mathbb{T}$ sont définies par la notion d'invariance de ce tenseur dans tous changement de base :

$$\mathbb{T} = t^{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}'_j \otimes \vec{e}''_k = T^{IJK} \vec{E}_I \otimes \vec{E}'_J \otimes \vec{E}''_K$$

On peut alors en déduire les relations fondamentales suivantes :

$$T^{IJK} = b_i^I b'^J_j b''^K_k t^{ijk} \Leftrightarrow t^{ijk} = a_I^i a'^j_J a''^k_K T^{IJK}$$

En fait, en général, les tenseurs employés sont plus restrictifs car ils ne sont définis qu'à partir d'un espace vectoriel E_n et de son dual $E_n^{\times}$.

On appelle *tenseur d'ordre p sur* E_n tout tenseur sur un produit de *p* espaces vectoriels dont chacun est identique à E_n ou à son dual $E_n^{\times}$.

Ce tenseur est dit *affine* si l'espace vectoriel E_n est dotée d'une structure affine.

Les conventions de notation pour un tenseur $\mathbb{T}$ de l'espace vectoriel $E_n \otimes E_n \otimes E_n^* \otimes \cdots$ sont les suivantes :

- Tous les facteurs E_n du produit $E_n \otimes E_n \otimes E_n^* \otimes \cdots$ seront rapportés à une même base $(\vec{e}_i)$.

- Tous les facteurs $E_n^{\times}$ du produit $E_n \otimes E_n \otimes E_n^* \otimes \cdots$ seront rapportés à une même base duale $\left(e^{*i}\right)$.

Ainsi à toute base $\left(\vec{e}_i\right)$ de E_n correspond une base $\left(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k} \otimes \cdots\right)$ de $E_n \otimes E_n \otimes E_n^* \otimes \cdots$. Nous dirons que les composantes de $\mathbb{T}$ suivant cette base sont les composantes de $\mathbb{T}$ suivant la base $\left(\vec{e}_i\right)$.

Ces composantes seront notées $t^{ij\cdots}_{k\cdots}$. Un indice supérieur (resp. inférieur) correspondra donc à chaque facteur de base pris dans E_n (resp. $E_n^{\times}$) et les rangs latéraux des indices reproduiront l'ordre des facteurs de base correspondants.

<u>Exemples</u>

1- Considérons que E_n soit en fait $\mathbf{R^3}$. L'ensemble des formes linéaires sur $\mathbf{R^3}$ est l'espace vectoriel dual $\mathbf{R}^{\mathbf{3}\times}$. Avec une seule multiplication tensorielle, nous pouvons faire apparaître quatre espaces vectoriels dont la dimension est 9 :

$$\mathbb{T} \in \mathbf{R^3} \otimes \mathbf{R^3} \qquad \mathbb{T} = t^{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = t^{ij}\, \pi_{ij}$$

$$\mathbb{T} \in \mathbf{R^3} \otimes \mathbf{R}^{\mathbf{3}\times} \qquad \mathbb{T} = t^i{}_j\, \vec{e}_i \otimes e^{*j} = t^i{}_j\, \pi_i{}^j$$

$$\mathbb{T} \in \mathbf{R}^{\mathbf{3}\times} \otimes \mathbf{R}^{\mathbf{3}\times} \qquad \mathbb{T} = t_{ij}\, e^{*i} \otimes e^{*j} = t_{ij}\, \pi^{ij}$$

$$\mathbb{T} \in \mathbf{R}^{\mathbf{3}\times} \otimes \mathbf{R^3} \qquad \mathbb{T} = t_i{}^j\, e^{*i} \otimes \vec{e}_j = t_i{}^j\, \pi^i{}_j$$

2- Un élément de $E_n \otimes E_n^* \otimes E_n^* \otimes E_n$ sera noté :

$$\mathbb{T} = t^{i\ \ l}_{\ jk}\vec{e}_i \otimes e^{*j} \otimes e^{*k} \otimes \vec{e}_l = T^{I\ \ L}_{\ JK}\vec{E}_I \otimes E^{*J} \otimes E^{*K} \otimes \vec{E}_L$$

<u>Changement de base</u>

Un changement de base est défini par les relations suivantes :

$$\left.\vec{E}_I = a_I^i \vec{e}_i\right\} \Leftrightarrow \left\{\vec{e}_i = b_i^I \vec{E}_I\right.$$

$$\vec{E}_I = a_I^i \vec{e}_i \Leftrightarrow \vec{e}_i = b_i^I \vec{E}_I$$

Dans l'exemple ci-dessus, les nouvelles composantes du tenseur $\mathbb{T}$ sont :

$$\mathbb{T} = t^{i\ \ l}_{\ jk}\vec{e}_i \otimes e^{*j} \otimes e^{*k} \otimes \vec{e}_l = T^{I\ \ L}_{\ JK}\vec{E}_I \otimes E^{*J} \otimes E^{*K} \otimes \vec{E}_L$$

Ce qui nous donne :

$$T^{I\ \ L}_{\ JK} = b_i^I a_J^j a_K^k b_l^L t^{i\ \ l}_{\ jk} \iff t^{i\ \ l}_{\ jk} = a_I^i b_j^J b_k^K a_L^l T^{I\ \ L}_{\ JK}$$

Les formules précédentes montrent bien l'intérêt d'une notation qui de prime abord semble un peu lourde.

<u>Réciprocité</u>

Inversement donnons-nous à priori une suite $t^{i\ \ l}_{\ jk}$ de n^4 composantes de E_n.

> Nous dirons que cette suite est tensorielle sur E_n si ce sont les composantes d'un tenseur, autrement dit si $t^{i\ \ l}_{\ jk}\vec{e}_i \otimes e^{*j} \otimes e^{*k} \otimes \vec{e}_l$ est un élément *intrinsèque* de $E_n \otimes E_n^* \otimes E_n^* \otimes E_n$.

En fait, on peut traduire la tensorialité par l'affirmation suivante :

Pour qu'une suite $t^{i\ l}_{jk}$ de n^4 composantes de E_n soit tensorielle sur cet espace, il faut et il suffit que le changement de base

$$\vec{E}_I = a^i_I \vec{e}_i \Leftrightarrow \vec{e}_i = b^I_i \vec{E}_I$$

la transforme en une suite $T^{I\ L}_{JK}$ telle que :

$$T^{I\ L}_{JK} = b^I_i a^j_J a^k_K b^L_l t^{i\ l}_{jk}$$

On peut donc remarquer qu'il existe une correspondance biunivoque entre les tenseurs sur E_n et les suites tensorielles sur cet espace. Pratiquement nous ne distinguerons pas le tenseur $\mathbb{T}$ de la suite tensorielle $t^{i\ l}_{jk}$ et on notera $\mathbb{T}=\left(t^{i\ l}_{jk}\right)$ en sous-entendant la référence à la base $\left(\vec{e}_i\right)$.

Exemples fondamentaux

1- Tenseur de KRONECKER

Noté δ^i_j ou encore $\delta_j^{\ i}$ (et donc tout simplement δ^i_j), le symbole de KRONECKER est tensoriel sur tout espace vectoriel E_n. Le tenseur associé dont les composantes suivant une base particulière $\left(\vec{e}_i\right)$ sont $t^i_{\ j} = \delta^i_j$, est très caractéristique car les composantes sont indépendantes de la base utilisée. En effet, dans une autre base $\left(\vec{E}_I\right)$, les composantes de ce tenseur sont :

$$T^I_{\ J} = b^I_i a^j_J t^i_{\ j} = b^I_i a^j_J \delta^i_j = b^I_i a^i_J = \delta^I_J$$

2- Attention, noté δ_{ij} ou encore δ^{ij}, le symbole de KRONECKER n'est pas tensoriel.

3- Dans le même ordre d'idée, il faut noter que les coefficients a^j_i d'un changement de base ne sont pas tensoriels. La première caractéristique d'une suite tensorielle est de n'être fonction que d'une seule base. La suite $\left(a^j_i\right)$ est fonction du couple de base $\left[\left(\vec{e}_i\right),\left(\vec{E}_I\right)\right]$.

4- Considérons la suite $\left(g_{ij}\right)$ des neuf produits scalaires des vecteurs de la base $\left(\vec{e}_i\right)$ de $\mathbf{R}^3$:

$$g_{ij} = \vec{e}_i . \vec{e}_j$$

Cette suite est symétrique car on a :

$$\vec{e}_i . \vec{e}_j = \vec{e}_j . \vec{e}_i \Rightarrow g_{ij} = g_{ji}$$

Cette suite tensorielle constitue la suite des composantes d'un tenseur appartenant à $\mathbf{R}^{3\times} \otimes \mathbf{R}^{3\times}$ appelé *le tenseur fondamental sur* $\mathbf{R}^3$.

En géométrie, son importance est capitale, car la connaissance des neuf produits scalaires g_{ij} détermine les longueurs des vecteurs de base et les angles qu'ils font deux à deux.

Si on admet que le produit scalaire est une forme linéaire sur $\mathbf{R}$, on peut alors introduire les composantes covariantes des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Elles sont définies par :

$$v_i = \vec{V}.\vec{e}_i = \left(v^j \vec{e}_j\right).\vec{e}_i = v^j\left(\vec{e}_j . \vec{e}_i\right) = g_{ij} v^j$$

On peut alors exprimer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques :

$$\vec{V}.\vec{U} = \left(v^j \vec{e}_j\right).\left(u^i \vec{e}_i\right) = v^j u^i \left(\vec{e}_j . \vec{e}_i\right) = u^i g_{ij} v^j = u^i v_i = u_i v^i$$

Ainsi, pour obtenir le produit scalaire de deux vecteurs, il suffit de multiplier les composantes covariantes d'un vecteur par les composantes contravariantes de l'autre vecteur et de faire la somme de ces produits.

5- Un tenseur d'ordre *p* sur E_n est apparu comme défini par une suite de n^p composantes. En étendant cette notion à *p*=0, on obtient un être à une seule composante, sans variance, qu'on appelle un *scalaire intrinsèque*.

Pour la généralité de certains énoncés, il sera effectivement utile d'assimiler les scalaires intrinsèques aux tenseurs d'ordre 0.

Tenseurs symétriques ou antisymétriques

On remarque, sur un tenseur d'ordre deux, que l'égalité $t^{ij} = \varepsilon t^{ji}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ est invariante pour tout changement de base. C'est une propriété intrinsèque à la suite tensorielle.

Si $\varepsilon = 1$, on dit que le tenseur est *symétrique* et si $\varepsilon = -1$ on dit que le tenseur est *antisymétrique*.

Ces notions de symétrie et d'antisymétrie peuvent être généralisées à des tenseurs d'ordre supérieur à deux. L'observation vaut alors pour des symétries ou des antisymétries *partielles*, c'est à dire portant sur la transposition de deux indices particuliers, pourvu que ces deux indices soient à la même hauteur.

Ainsi le tenseur suivant est symétrique

$$t^i_{jkl} = t^i_{lkj}$$

En particulier, si un tenseur est complètement contravariant (ou complètement covariant), il se peut que toute transposition de deux indices change la composante correspondante en elle-même (resp. en son opposée). On dira alors que le tenseur est *complètement symétrique* (resp. *complètement antisymétrique*).

Opérations sur les tenseurs

Egalité de deux tenseurs

En toute rigueur, un tenseur est égal à un autre s'il est le même élément d'un espace. Ainsi l'égalité ne peut être envisagée qu'entre tenseurs du même type, c'est à dire des tenseurs associés au même espace vectoriel E_n et présentant le même nombre et la même disposition des indices.

> Nous dirons que deux tenseurs sont égaux si toutes leurs composantes homologues dans une base tensorielle sont égales.

Nous pourrons donc désigner plusieurs tenseurs sous la même notation.

Ce qui nous donne pour les tenseurs suivants :

$$\mathbb{U} = u^{ij}_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k} \qquad \mathbb{V} = v^{pq}_r \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes e^{*r}$$

$$\mathbb{U} = \mathbb{V} \Leftrightarrow u^{ij}_k = v^{ij}_k \Leftrightarrow \left(u^{ij}_k\right) = \left(v^{ij}_k\right)$$

En particulier, le tenseur $\mathbb{U}$ sera nul si et seulement si toutes ses composantes dans une base sont nulles.

On peut remarquer le caractère intrinsèque de cette notion d'égalité.

Opérations linéaires

Soient encore $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ deux tenseurs du même type, éléments de $E_n \otimes E_n \otimes E_n^*$, donnés par :

$$\mathbb{U} = u^{ij}_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k} \quad \mathbb{V} = v^{pq}_r \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes e^{*r}$$

A priori, l'élément défini par $\lambda\mathbb{U}+\mu\mathbb{V}$, avec λ et μ deux scalaires intrinsèques, est un élément de $E_n \otimes E_n \otimes E_n^*$:

$$\lambda U+\mu V= \lambda\left(u^{ij}_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k}\right)+\mu\left(v^{pq}_r \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes e^{*r}\right)=\left(\lambda u^{pq}_r + \mu v^{pq}_r\right)\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes e^{*r}$$

> Donc, si $\left(u^{ij}_k\right)$ et $\left(v^{ij}_k\right)$ sont les suites de composantes de deux tenseurs $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ du même type, et si λ et μ sont deux scalaires intrinsèques, alors la suite $\left(t^{ij}_k\right)$ telle que
>
> $$t^{ij}_k = \lambda u^{ij}_k + \mu v^{ij}_k$$
>
> Est une suite tensorielle. C'est la suite des composantes du tenseur $\mathbb{T} = \lambda\mathbb{U}+\mu\mathbb{V}$

Produit tensoriel de deux tenseurs

Considérons à présent deux tenseurs $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ non nécessairement du même type. Par exemple :

$$\mathbb{U} = u^{ij}_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k} \quad \text{et} \quad \mathbb{V} = v^{q}_p e^{*p} \otimes \vec{e}_q$$

Dans la multiplication de $E_n \otimes E_n \otimes E_n^*$ par $E_n^* \otimes E_n$, il leur correspond (du fait de l'associativité de la multiplication tensorielle) un élément de $E_n \otimes E_n \otimes E_n^* \otimes E_n^* \otimes E_n$ qui est :

$$U \otimes V = \left(u^{ij}_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k}\right)\otimes\left(v^{q}_p e^{*p} \otimes \vec{e}_q\right)= u^{ij}_k v^{q}_p \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k} \otimes e^{*p} \otimes \vec{e}_q$$

> Donc, si $\left(u^{ij}_k\right)$ et $\left(v^{q}_p\right)$ sont les suites de composantes de deux tenseurs $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$, la suite $\left(t^{ij\ \ q}_{kp}\right)$ telle que $t^{ij\ \ q}_{kp} = u^{ij}_k v^{q}_p$
>
> est tensorielle; c'est la suite des composantes du tenseur $\mathbb{T} = \mathbb{U}\otimes\mathbb{V}$.

L'ordre du nouveau tenseur ainsi défini est égal à la somme des ordres des deux tenseurs générateurs.

Contraction d'un tenseur mixte

Considérons un tenseur mixte, par exemple $t^{ij\ \ m}_{kl}$.

> On dit que l'on contracte le tenseur $\left(t^{ij\ \ m}_{kl}\right)$ en *k* et *m* quand, pour tout choix des autres indices, on fait la somme des composantes où *k*=*m*.

On obtient ainsi une nouvelle suite de composantes :

$$w^{ij}_l = \sum_{k=1}^{n} t^{ij\ \ k}_{kl} = t^{ij\ \ m}_{kl}\delta^k_m = t^{ij\ \ k}_{kl}$$

On peut, sans difficultés, démontrer la tensorialité de cette suite de composante.

On dit que le tenseur $\left(w^{ij}_l\right)$ est le *tenseur contracté, en k et m, du tenseur* $\left(t^{ij\ \ m}_{kl}\right)$.

On constate que toute contraction d'un tenseur mixte ampute ce tenseur à la fois d'une covariance et d'une variance. Ainsi, à partir d'un tenseur mixte d'ordre *p*, la contraction nous donne un tenseur d'ordre *p-2* qui d'ailleurs, n'est pas nécessairement mixte.

En particulier, si un tenseur d'ordre *2p* est *p* fois covariant et *p* fois contravariant, *p* contractions successives nous permettrons d'atteindre un tenseur d'ordre zéro, c'est à dire un scalaire intrinsèque.

Remarque Si la suite tensorielle $\left(c^i_{\ j}\right)$ peut être considérée comme celle des éléments de la matrice associée à un opérateur, la contraction $c^i_{\ i}$ donne la somme des éléments diagonaux, qu'on appelle trace de la matrice. On retrouve ainsi que la trace est invariante par changement de base.

Multiplication contractée

En combinant la contraction à la multiplication tensorielle, on peut définir la *multiplication contractée*.

Par exemple, u^{ij}_k et $v^i_{\ j}$ étant des tenseurs, on peut former les tenseurs suivants :

$$t^{ij\,l}_{k\,m} = u^{ij}_k v^l_m \,;\, w^{ij}_m = t^{ij\,k}_{k\,m}$$

Mais on peut écrire directement :

$$w^{ij}_m = u^{ij}_k v^k_m$$

On pourra bien entendu effectuer plusieurs contractions simultanément, les indices associés étant ou non dans le même tenseur.

Critère de tensorialité

Pour savoir si une suite est tensorielle, on peut étudier sa transformation par changement de base. Il est cependant souvent plus rapide d'appliquer un critère de tensorialité que nous admettrons.

> Pour qu'une suite de composantes t^{ij}_k soit tensorielle il faut et il suffit que, pour tout choix du vecteur $\vec{V}$, la suite $u^{ij} = t^{ij}_k v^k$ soit tensorielle.

Mais on peut aussi faire apparaître des contractions plus élevées.

> Pour qu'une suite de composantes, à *p* indices supérieurs et *q* indices inférieurs, soit tensorielle, il faut et il suffit que son produit complètement contracté par *p* formes linéaires et *q* vecteurs soit un scalaire intrinsèque, quelque soit le choix des *p* formes linéaires et des *q* vecteurs.

En réalité, il n'est pas indispensable d'effectuer la contraction sur tous les indices, mais la première forme du critère de tensorialité est rarement employée car en général il est souhaitable que la nouvelle suite obtenue par contraction soit la plus simple possible. C'est pourquoi on a recours à la contraction maximum.

Exemple

On veut tester la suite $\left(c^i_j\right)$ associée à un opérateur **C** qui transforme tout vecteur $\vec{V}$ de $\mathbf{R^3}$ en un autre vecteur $\vec{U}$ de $\mathbf{R^3}$ $(u^i = c^i_j v^j)$

Nous avons donc la contraction complète d'une suite tensorielle $\left(v^j\right)$ à un seul indice avec la suite $\left(c^i_j\right)$. Mais, pour toute suite $\left(v^j\right)$ nous obtenons une suite $\left(u^i\right)$ tensorielle car c'est la suite des composantes d'un vecteur de $\mathbf{R^3}$. On en déduit que $\left(c^i_j\right)$ est une suite tensorielle.

Cette démonstration est plus rapide que l'étude des changements de base effectuée plus haut.

Remarque

Il arrive parfois qu'on utilise pour la démonstration des suites annexes obtenues par les composantes d'un déplacement infinitésimal dans l'espace. Bien entendu ces vecteurs infinitésimaux ne constituent pas tous les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ mais comme on peut établir une bijection entre les vecteurs infinitésimaux et les vecteurs finis à l'aide d'une constante ε infinitésimale, la démonstration reste valable.

Algèbre tensorielle en espace métrique

Les propriétés très générales de l'espace affine resteront évidemment valables lorsque nous choisirons une métrique, c'est à dire lorsque nous fixerons à tous les vecteurs de base une commune mesure. En partant d'un repère orthogonal, dont les vecteurs de base ont tous un même module, on peut construire une infinité d'autres repères rectilignes ou curvilignes, au moyen d'un changement de coordonnées, changement au cours duquel toute longueur doit rester invariable. La notion de longueur permettra ensuite de définir la notion d'angle.

Produit scalaire

Soit E_n un espace vectoriel sur un corps K de scalaires. Nous allons enrichir sa structure et le rendre métrique en définissant une nouvelle loi de composition qui sera appelée la *multiplication scalaire*.

Toutes les multiplications scalaires ont un point commun : à tous couples de vecteurs $(\vec{V},\vec{V}')$ de E_n elles associent un produit scalaire qui donne un *scalaire intrinsèque* noté $\vec{V}.\vec{V}'$.

Le produit scalaire possède les 4 propriétés suivantes :

* commutativité de la multiplication scalaire $\vec{V}.\vec{V}'=\vec{V}'.\vec{V}$

*associativité de la multiplication scalaire par un scalaire $\lambda(\vec{V}.\vec{V}')=(\lambda\vec{V}).\vec{V}'$

*distributivité par rapport à l'addition $(\vec{V}+\vec{V}').\vec{V}''=(\vec{V}.\vec{V}'')+(\vec{V}'.\vec{V}'')$

*si $\vec{V}.\vec{V}'=0$ pour tout $\vec{V}'$, alors $\vec{V}=\vec{0}$

A partir de quatre axiomes, il est facile d'expliciter la multiplication scalaire. On associe une base $(\vec{e}_i)$ à l'espace vectoriel E_n. On peut alors écrire:

$$\vec{V}=v^i\vec{e}_i \quad \vec{V}'=v'^i\vec{e}_i$$

Ce qui nous donne pour l'expression de la multiplication scalaire :

$$\vec{V}.\vec{V}'=(v^i\vec{e}_i).(v'^j\vec{e}_j)=(v^iv'^j)\vec{e}_i.\vec{e}_j$$

Soit :

$$\vec{V}.\vec{V}'=g_{ij}v^iv'^j \quad \text{avec} \quad \vec{e}_i.\vec{e}_j=g_{ij}$$

On remarque donc que tous les produits scalaires seront définis à partir des produits scalaires des vecteurs de base.

Le tenseur fondamental

D'après la commutativité, on a nécessairement : $g_{ij}=g_{ji}$

D'autre part, la quatrième propriété du produit scalaire nous permet d'écrire :

$$\forall v'^j, g_{ij}v^iv'^j=0 \Rightarrow g_{ij}v^i=0 \Rightarrow v^i=0\forall i$$

Autrement dit, le système des n équations $g_{ij}v^i = 0$ aux n inconnues v^i n'admet que la solution $v^i = 0$. Pour cela, il faut et il suffit que la matrice des g_{ij} soit régulière et que son déterminant soit non nul.

Réciproquement, si nous nous donnons arbitrairement n^2 scalaires g_{ij} tels que :

$$g_{ij} = g_{ji} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Det}(g_{ij}) \neq 0$$

il est immédiat de vérifier que la loi de multiplication définie par

$\vec{V}.\vec{V}' = g_{ij}v^i v'^j$ pour $\vec{V} = v^i \vec{e}_i$ et $\vec{V}' = v'^i \vec{e}_i$ satisfait aux quatre axiomes.

En conclusion, il existe effectivement une loi de multiplication scalaire satisfaisant aux quatre propriétés. On peut se la définir en se donnant arbitrairement, pour une base $(\vec{e}_i)$, les n^2 produits scalaires :

$$\vec{e}_i.\vec{e}_j = g_{ij} \qquad \text{tels que } g_{ij} = g_{ji} \text{ et } \mathrm{Det}(g_{ij}) \neq 0$$

> Les $\vec{e}_i.\vec{e}_j = g_{ij}$ sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur sur E_n que nous noterons $\mathbb{G}$ et que nous appelerons le *tenseur fondamental* sur E_n.

On appelle *forme bilinéaire fondamentale* de E_n l'expression explicite $g_{ij}v^i v'^j$ du produit scalaire du couple de vecteur générique.

On appelle *forme quadratique fondamentale* l'expression correspondante du carré scalaire de son vecteur générique : $$(\vec{V})^2 = \vec{V}.\vec{V} = g_{ij}v^i v^j$$

Il est à noter qu'il suffit de se donner cette dernière forme pour définir complètement les g_{ij} et par conséquent la loi de composition scalaire sur E_n.

Enfin, la matrice des g_{ij} étant régulière, elle est inversible et nous noterons γ^{ij} les éléments symétriques de sa matrice inverse. Nous pourrons donc écrire :

$$\gamma^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

<u>Changement de bases</u>

Considérons une nouvelle base $(\vec{E}_I)$. On peut bien entendu définir les produits scalaires des vecteurs de cette base :

$$\vec{E}_I.\vec{E}_J = G_{IJ}$$

Mais on peut aussi calculer ces produits scalaires en fonction des produits scalaires des vecteurs de la base $(\vec{e}_i)$ et de la matrice de changement de base. Le résultat est :

$$G_{IJ} = a^i_I a^j_J g_{ij}$$

De même pour le tenseur fondamental inverse, on a :

$$\Gamma^{IJ} = b^I_i b^J_j \gamma^{ij}$$

On peut aussi calculer le déterminant de la matrice des g_{ij} que l'on appellera le *déterminant de tenseur fondamental* :

$$g = \mathrm{Det}(g_{ij})$$

Dans le changement de base caractérisé par une matrice (a^i_I) de déterminant $\Delta = \mathrm{Det}(a^i_I)$ nous obtiendrons la formule suivante :

$$\mathrm{Det}(G_{IJ}) = \Delta^2 \mathrm{Det}(g_{ij})$$

Ce déterminant n'est pas conservé dans le changement de base, mais son signe reste indépendant de la base.

Composantes covaraintes et contravariantes d'un tenseur

Composantes covariantes d'un vecteur

Soit $\vec{V} = v^i \vec{e}_i$ un vecteur générique de E_n. Quand on forme ses produits scalaires avec les vecteurs de base, on obtient :

$$\vec{V} \bullet \vec{e}_i = (v^j \vec{e}_j) \bullet \vec{e}_i = g_{ij} v^j$$

Cette dernière entité, que l'on notera $v_i = g_{ij} v^j$, est appelée la $i^{ème}$ *composante covarainte* du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{e}_i)$.

> Tout vecteur $\vec{V}$ de l'espace E_n muni du produit scalaire peut être défini par ses composantes contravariantes v^i (avec $\vec{V} = v^i \vec{e}_i$) ou par ses composantes covariantes v_i (avec $v_i = \vec{V} \bullet \vec{e}_i$). Les liens existants sont :
>
> $v_j = v^i g_{ij}$ et $v^i = \gamma^{ij} v_j$

L'introduction des composantes covariantes permet de varier les expressions du produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{V} \bullet \vec{U} = g_{ij} v^i u^j = \gamma^{ij} v_j u_i = v^i u_i = v_i u^i$$

Cette relation nous permet d'affirmer que la suite (γ^{ij}) est tensorielle.

Composantes contravariantes d'une forme linéaire

De même que pour le vecteur, on peut considérer un élément générique de E_n^*, c'est-à-dire une forme linéaire définie par :

$$f = f_i e^{*i}$$

Du fait de la tensorialité de la suite (γ^{ij}), le terme $f^i = \gamma^{ij} f_j$ est un tenseur contravariant qui caractérise la forme linéaire.

> Toute forme linéaire f de l'espace E_n muni du produit scalaire peut être définie par ses composantes covariantes f_i (avec $f = f_i e^{*i}$) ou par ses composantes contravariantes f^i. Les liens existants sont :
>
> $f^i = \gamma^{ij} f_j$ et $f_i = g_{ij} f^j$

On remarque donc la forte analogie existante entre les vecteurs, éléments de l'espace vectoriel E_n, et les formes linéaires, éléments de l'espace vectoriel dual E_n^*. Cette analogie permet aussi de réaliser les changements d'espace vectoriel. Ainsi les relations précédents permettent d'identifier la forme linéaire f à un vecteur $\vec{F}$ de composantes covariantes f_i. On pourra ainsi écrire pour tout vecteur $\vec{V}$ de E_n :

$$\vec{F} \bullet \vec{V} = f_i v^j = g_{ij} f^i v^j = f(\vec{V})$$

Cette relation montre bien que l'on peut confondre le vecteur $\vec{F}$ et l'application linéaire f .Ainsi un élément d'une base $(\vec{e}_i)$ doit pouvoir s'identifier à un élément d'une base (e^{*i}) et vice-versa. On a :

$$\vec{e}_i . \vec{V} = v_i = g_{ij} v^j = g_{ij} e^{*j}(\vec{V})$$

Ce qui nous donne les relations fondamentales suivantes :

$$\vec{e}_i = g_{ij} e^{*j} \qquad \text{et} \qquad e^{*j} = \gamma^{ij} \vec{e}_i$$

<u>Composantes d'un tenseur</u>

On peut dons constater la confusion entre l'espace vectoriel E_n et son dual E_n^*. On en déduit que tous le tenseurs du même ordre p sur E_n ne forment plus qu'un espace vectoriel unique, dont tout élément peut être défini par des composantes de variances arbitraires. Ces tenseurs seront appelés *tenseurs pré-euclidiens*.

Ainsi nous avons pour un tenseur pré-euclidien d'ordre 3 :

$$T = t^{ij}_{\ \ k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k} = t^{ij}_{\ \ k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \gamma^{kh} \vec{e}_h = t^{ij}_{\ \ h} \gamma^{hk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k = t^{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$t^{ij}_{\ \ h} \gamma^{hk} = t^{ijk}$$

De la même nous allons pouvoir écrire :

$$t^{ih}_{\ \ k} g_{hj} = t^{i}_{\ jk}$$

Mais ces relations sont encore valables pour le tenseur fondamental. On peut donc ainsi définir ses composantes mixtes :

$$g_{ik} \gamma^{kj} = g_i^{\ j} = \delta_i^j$$

Et ses composantes complètement contravariantes :

$$g_i^{\ j} \gamma^{ih} = g^{hj} = \delta_i^j \gamma^{ih} = \gamma^{jh} = \gamma^{hj}$$

Ainsi, les γ^{ij} ne sont autre que les composantes g^{ij} complètement contravariantes du tenseur fondamental lui-même.

On obtient donc une règle dite d'abaissement ou d'élévation d'indice.

> Pour élever (resp. abaisser) un indice k, on le remplace par un indice muet h et on effectue le produit contracté par g^{kh} (resp. par g_{hk}).

On peut ainsi remarquer qu'un tenseur pré-euclidien admet différents modes de représentation. Il est possible de regrouper tous les indices en position supérieure ce qui nous donnera alors l'expression contravariante du tenseur. L'expression covariante sera obtenue avec un tenseur ayant ses indices en position inférieur.

<u>Opérations sur les tenseurs pré-euclidiens</u>

La possibilité de déplacer les indices accroît le nombre des opérations possibles.

Ainsi l'égalité de deux tenseurs pourra se définir simplement à partir de l'instant où ils sont du même ordre. De même l'addition sera obtenue aussi sur des tenseurs de même ordre. Pour ce genre d'opération, il faut définir les deux tenseurs dans la même base. Les propriétés obtenues étant intrinsèques, elles seront vraies dans toutes autres bases, en particulier celle obtenue par déplacement vertical d'indice.

De la même, la multiplication tensorielle est compatible avec les déplacements verticaux d'indices.

<u>Orthogonalisation des espaces vectoriels</u>

Dans l'espace vectoriel pré-euclidien E_n, deux vecteurs sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

Cette relation, symétrique vis-à-vis des deux vecteurs, est encore vérifiée si l'un ou l'autre des deux vecteurs est nul. Autrement, elle subsiste si on remplace un vecteur par un vecteur parallèle. On dit donc que l'orthogonalité de deux vecteurs non nuls dépend seulement de leur "direction".

Une base est dite *orthogonale* si chacun de ses vecteurs est orthogonal à tous les autres.

Il est toujours possible de déterminer une telle base. Le processus de recherche d'une base orthogonale est appeler orthogonalisation de l'espace vectoriel.

Dans une base orthogonale, le carré scalaire d'un vecteur quelconque ne présente que des termes carrés. En effet si $\left(\vec{E}_I\right)$ est une base orthogonale, le tenseur fondamental associé défini par $G_{IJ} = \vec{E}_I \cdot \vec{E}_J$ doit être tel que G_{IJ} est nul si *I* est différent de *J*.

Ainsi dans la base orthogonale, la matrice $\left(G_{IJ}\right)$ du tenseur fondamental est réduite à une forme diagonale. Toutefois, à priori, les termes G_{IJ} ne sont pas nécessairement tous positifs. En conséquence, il n'est pas toujours possible de donner une base orthonormée dans un espace vectoriel pré-euclidien.

Espaces vectoriels euclidiens.

Pour pouvoir toujours définir une base orthonormée, il suffit de modifier la quatrième propriété du produit scalaire:

si $\vec{V} \cdot \vec{V}' = 0$ pour tout $\vec{V}'$, alors $\vec{V} = 0$

La nouvelle propriété à prendre en compte est la suivante :

si $\vec{V} \neq 0$ alors $\left(\vec{V}\right)^2 > 0$

Avec cette nouvelle propriété, on dit que la forme quadratique fondamentale $\left(\vec{V}\right)^2 = g_{ij} v^i v^j$ est *définie positive*, c'est-à-dire strictement positive pour tout vecteur $\vec{V}$ non nul.

Norme d'un vecteur

A tout vecteur $\vec{V}$ de E_n on peut associer un scalaire positif appelé *norme* du vecteur et défini par la racine carrée de son carré scalaire :

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{\left(\vec{V}\right)^2}$$

Les propriétés essentielles de la norme sont les suivantes :

* Inégalité de *Schwarz*

$$\left\|\vec{V} \cdot \vec{V}'\right\| \leq \left\|\vec{V}\right\| \left\|\vec{V}'\right\|$$

L'égalité n'est obtenue que si les vecteurs sont parallèles.

* Inégalité triangulaire

$$\left\|\vec{V} + \vec{V}'\right\| \leq \left\|\vec{V}\right\| + \left\|\vec{V}'\right\|$$

L'égalité n'est obtenue que si les vecteurs sont parallèles et de même sens.

Bases orthonormées d'un espace vectoriel euclidien

Dans un espace vectoriel euclidien E_n , on appelle *vecteur unitaire* out vecteur de norme égale à l'unité. Les bases formées de vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux prennent le nom de bases orthonormées.

Les bases orthonormées sont celles qui réduisent la matrice du tenseur fondamental à la matrice unité.

Dans un changement de bases orthonormées, la matrice de changement de base est telle que son inverse est égal à sa transposée. On dit alors que c'est une matrice *unitaire*. Le déterminant d'une telle matrice est égal à plus ou moins un.

Dérivation en notation tensorielle

Volontairement, nous allons nous restreindre au formalisme de dérivation dans des bases fixes dans un premier temps.

Ainsi l'espace géométrique sera repéré à l'aide d'un système d'axes rectilignes valables en tout point de l'espace. La base $(\vec{e}_i)$ définie en un point appelé origine du système d'axes est indépendante des coordonnées d'un point M de l'espace. Les matrices de changement de base ne contiendront que des termes constants par rapport aux variables d'espaces.

Dérivées par rapport aux variables d'espaces

Position d'un point

L'espace est supposé être rapporté à un repère constitué des trois vecteurs formant une base $(\vec{e}_i)$. Ces vecteurs sont définis en un point O appelé *origine* du système d'axes rectilignes. Un point M est alors repéré par les composantes du *vecteur position* $\vec{OM} = x^i \vec{e}_i$.

En tout point de l'espace on pourra définir des grandeurs physiques que nous appellerons *champ* et qui doit représenter des grandeurs intrinsèques.

On parlera ainsi de champ scalaire (pression, température, ...), de champ vectoriel (champ électrique, accélération de la pesanteur,...) ou de champ tensoriel (contraintes, déformations, ...).

Dérivée d'un scalaire

Un champ scalaire U est dérivable en un point M s'il admet en ce point trois dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x^i} = U_{,i}$ par rapport aux variables d'espace x^i. On pourra alors définir la différentielle de U en M qui représente l'accroissement au premier ordre de U pour un déplacement infinitésimal intrinsèque :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x^i} dx^i = U_{,i}\, dx^i$$

Cette différentielle est un scalaire intrinsèque (tenseur d'ordre 0). D'autre part, dx^i représente la composante contravariante d'un tenseur d'ordre 1 $\left(d\,\vec{OM} \right)$.

On peut donc dire que $\frac{\partial U}{\partial x^i} = U_{,i}$ représente la composante covariante d'un tenseur 1.

> Le tenseur de composante covariante $\frac{\partial U}{\partial x^i} = U_{,i}$ est le *tenseur gradient* du champ scalaire.

Dérivée d'un vecteur

On considère un vecteur déterminé par ses composantes contravariantes :

$$\vec{V} = v^i \vec{e}_i$$

On peut alors définir la dérivée de ce vecteur :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^i} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\vec{e}_j + v^j \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i}$$

Mais $\vec{e}_{j,i}$ est nul du fait que l'on utilise des coordonnées rectilignes indépendantes du point. On obtient ainsi :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^i} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\vec{e}_j = v^j{}_{,i}\vec{e}_j$$

De plus dans un changement de base de $(\vec{e}_i)$ vers $(\vec{E}_I)$ caractérisé par la matrice (a_I^i) et la matrice inverse (b_i^I) on aura :

$$\overrightarrow{OM} = x^i\vec{e}_i = X^I\vec{E}_I = a_I^i X^I \vec{e}_i = b_i^I x^i \vec{E}_I$$
$$\vec{V} = v^i\vec{e}_i = V^I\vec{E}_I = a_I^i V^I \vec{e}_i = b_i^I v^i \vec{E}_I$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial v^j}{\partial x^i} = \frac{\partial v^j}{\partial X^I}\frac{\partial X^I}{\partial x^i} = \frac{\partial\left(a_J^j V^J\right)}{\partial X^I}\frac{\partial\left(b_k^I x^k\right)}{\partial x^i} = a_J^i b_i^I \frac{\partial V^J}{\partial X^I}$$

La formule précédente nous montre bien que $v^j{}_{,i}$ représente les composantes mixtes d'un tenseur du second ordre.

Dérivée d'un tenseur

Le calcul précédent peut très bien se généraliser à un tenseur d'ordre quelconque. Ainsi, à un tenseur d'ordre *n*, par dérivation nous pourrons lui associer un tenseur d'ordre *n+1*. Nous aurons par exemple pour un tenseur du quatrième ordre :

$$\mathbb{T} = t^{ij}{}_{kl}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k} \otimes e^{*l}$$
$$\frac{\partial \mathbb{T}}{\partial x^m} = t^{ij}{}_{kl,m}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^{*k} \otimes e^{*l}$$

> **Attention** Les formules précédentes ne sont valables que dans une base "*fixe*" c'est à dire indépendante des coordonnées de dérivation. Nous verrons par la suite des formules plus complètes permettant de prendre en compte la variation des vecteurs de bases avec les coordonnées.

Gradient, divergence, rotationnel

L'introduction des opérateurs classiques peut très bien se faire à partir d'un vecteur appelé Nabla. Ce vecteur est défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^i} e^{*i}$$

On peut alors généraliser les notions de gradient, divergence et rotationnel pour des tenseurs d'ordre quelconque :

Gradient	$\overrightarrow{\text{grad}}(\ )=\vec{\nabla}\otimes(\ )$	produit tensoriel
Divergence	$\text{div}(\ )=\vec{\nabla}.(\ )$	produit scalaire ou produit contracté
Rotationnel	$\overrightarrow{\text{Rot}}(\ )=\vec{\nabla}\wedge(\ )$	produit vectoriel ou produit extérieur
Laplacien	$\Delta(\ )=\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\otimes(\ )\right)$	divergence du gradient

Avec ces notations, on retrouve facilement les expressions indicielles des opérateurs dans un système de coordonnées rectilignes :

Divergence d'un vecteur

$$\text{div}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}.\left(\vec{V}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}e^{*i}\right).\left(v^k\vec{e}_k\right)=\frac{\partial v^k}{\partial x^i}\delta^i_k=\frac{\partial v^i}{\partial x^i}$$

Rotationnel d'un vecteur

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{V}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}e^{*i}\right)\wedge\left(v_k\vec{e}^{\,k}\right)=\varepsilon^{jik}\frac{\partial v_k}{\partial x^i}\vec{e}_j$$

On peut aussi étendre les notions à des tenseurs d'ordre quelconque :

Gradient d'un vecteur

$$\text{Grad}\left(\vec{V}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}e^{*i}\right)\otimes\left(v_k\vec{e}^{\,k}\right)=\frac{\partial v_k}{\partial x^i}e^{*i}\otimes\vec{e}^{\,k}=v_{k,i}e^{*i}\otimes\vec{e}^{\,k}=v^k_{,i}e^{*i}\otimes\vec{e}_k$$

On a donc un tenseur du second ordre que l'on peut représenter par ses composantes covariantes, mixtes ou contravariantes.

Divergences d'un tenseur

$$\text{div}(\mathbb{T})=\vec{\nabla}.(\mathbb{T})=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}e^{*i}\right).\left(t^{jk}\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}t^{jk}\delta^i_j\vec{e}_k=t^{jk}_{,j}\vec{e}_k$$

Ainsi, à partir d'un tenseur du second ordre, on obtient un tenseur du premier ordre, c'est à dire un vecteur.

Remarque

On a utilisé l'opérateur à gauche, ce qui nous a permis de définir une divergence à gauche :

$$\text{div}_{\text{g}}(\mathbb{T})=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}e^{*i}\right).\left(t^{jk}\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\right)=t^{jk}_{,j}\vec{e}_k$$

Mais on pourrait de même définir une divergence à droite :

$$\text{div}_{\text{d}}(\mathbb{T})=\left(t^{jk}\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\right).\left(\frac{\partial}{\partial x^i}e^{*i}\right)=t^{jk}_{,k}\vec{e}_j=t^{kj}_{,j}\vec{e}_k$$

On constate que si le tenseur $\mathbb{T}$ n'est pas symétrique par rapport à ses indices extrêmes, les deux divergences ne sont pas égales.

Coordonnées curvilignes

L'étude de certains phénomènes physiques peut être parfois délicate lorsque l'on veut constamment définir le vecteur position par rapport à un seul repère généralement rectiligne. On conçoit facilement que les problèmes de mise en forme en grandes déformations vont apporter des difficultés de positionnement.

De plus dans les espaces non euclidiens, il n'est pas possible de définir des coordonnées rectilignes. On doit alors impérativement utiliser des coordonnées curvilignes. Ainsi, pour définir la loi de variation de la pression à la surface de la terre, on ne peut pas définir deux axes rectilignes qui détermineraient un espace plan et non pas une sphère. On utilise alors comme coordonnées possibles la latitude et la longitude. Ce sont des coordonnées curvilignes.

Bases locales

Supposons l'espace déjà rapporté à un système de coordonnées rectilignes. A chaque point est associé une valeur et une seule du triplet $\left(x^i\right)$ et réciproquement à chaque valeur de la suite $\left(x^i\right)$ est associé un point et un seul.

Nous pouvons utiliser d'autres repérages des points M en remplaçant les $\left(x^i\right)$ par d'autres suites $\left(u^i\right)$ de trois paramètres. Pour qu'une telle suite permette de réaliser un repérage sans ambiguïté, il est nécessaire d'assurer une bijection entre les points M et les valeurs de cette suite. En fait cela revient à dire que chaque u^i devra être une fonction uniforme des x^i et vice versa. De plus pour des questions pratiques de calcul, nous imposerons aux u^i d'être des fonctions continues de M sauf en quelques points. Ainsi les u^i seront dérivables par rapport aux x^i. Nous pourrons écrire :

$$\begin{cases} x^1 = x^1\left(u^1, u^2, u^3\right) \\ x^2 = x^2\left(u^1, u^2, u^3\right) \\ x^3 = x^3\left(u^1, u^2, u^3\right) \end{cases}$$

Les coordonnées x^1, x^2, x^3 de M sont les coordonnées rectilignes (cartésiennes).

Les coordonnées u^1, u^2, u^3 de M sont les coordonnées curvilignes.

Prenons un point M, de coordonnées rectilignes x^1, x^2, x^3 obtenues en donnant aux coordonnées curvilignes des valeurs particulières. Par ce point passera une courbe caractérisée par $u^2 = cte$ et $u^3 = cte$, c'est à dire une courbe pour laquelle u^1 est la seule variable. Nous prendrons cette courbe comme ligne curviligne $\left(M, u^1\right)$. Nous pourrons bien entendu définir de la même façon deux autres lignes curvilignes. Les vecteurs de base des axes des coordonnées curvilignes sont définis par :

$$\vec{g}_1 = \left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u^1}\right)_{\substack{u^2=cte \\ u^3=cte}}$$

On définit ainsi une base locale en M $\left(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right)$. Les vecteurs déterminent en fait une base tangente aux lignes de coordonnées curvilignes.

Il est à noter que cette base n'est pas nécessairement orthonormée.

Remarques

1- On a :

$$\overrightarrow{OM} = x^i \vec{e}_i \Rightarrow \vec{g}_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \vec{e}_i$$

Il est évident que la base ainsi définie est dépendante du point M.

2- La relation vectorielle précédente est en fait une relation de changement de base du type :

$$\vec{g}_j = \alpha^i_j \vec{e}_i$$

Toutefois dans cette relation, les coefficients α^i_j ne sont plus constants, contrairement aux changements de bases rectilignes.

3- On peut inverser les relations précédentes. On obtient alors :

$$\vec{e}_i = \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\vec{g}_j$$

Symboles de CHRISTOFFEL

En coordonnées rectilignes, la tensorialité d'une suite a été introduite à partir de la notion de changement de base. On avait ainsi donnée la formule :

$$T^{I\ \ L}_{\ JK} = b^I_i a^j_J a^k_K b^L_l t^{i\ \ l}_{\ jk}$$

Supposons maintenant que la grandeur tensorielle $\mathbb{T}$ soit intrinsèquement définie en tout point M de l'espace, ou d'un domaine de l'espace. On parlera alors d'un *champ de tenseur*. Par exemple la température et le champ magnétique, qu'on peut mesurer ou repérer aux différents points de l'espace, constituent respectivement un champ scalaire (tenseur d'ordre 0) et un champ vectoriel (tenseur d'ordre 1).

Pour pouvoir comparer les "valeurs" $\mathbb{T}(M_1)$ et $\mathbb{T}(M_2)$ du champ entre deux points différents, il est impératif de pouvoir comparer les deux bases définies en ces deux points. Nous allons ainsi introduire la variation des vecteurs la base curviligne en fonction du point.

On veut calculer :

$$\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial u^k} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{OM} = x^i \vec{e}_i \Rightarrow \vec{g}_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}\vec{e}_i$$

On obtient :

$$\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial x^j}{\partial u^i}\vec{e}_j\right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial u^k \partial u^i}\vec{e}_j$$

Mais de plus, les vecteurs de la base rectiligne sont reliés aux vecteurs de la base curviligne :

$$\vec{e}_i = \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\vec{g}_j$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial u^k} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial u^k \partial u^i}\frac{\partial u^m}{\partial x^j}\vec{g}_m$$

On fait ainsi apparaître le *symbole de Christoffel* :

$$\Gamma^m_{ki} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial u^k \partial u^i}\frac{\partial u^m}{\partial x^j}$$

Propriétés :

1- Ce symbole est symétrique par rapport aux indices *i* et *k*.

$$\Gamma^m_{ki} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial u^k \partial u^i}\frac{\partial u^m}{\partial x^j} = \Gamma^m_{ik} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial u^i \partial u^k}\frac{\partial u^m}{\partial x^j}$$

2- On peut utiliser la méthode de montée et descente des indices :

$$\mathrm{d}\vec{g}_i = \Gamma^m_{ki}\,\mathrm{d}u^k\,\vec{g}_m$$

3- On a : $\vec{g}_{i,k} = \Gamma^m_{ki}\vec{g}_m$

Mais on démontre que dans la base duale on obtient :

$$\vec{g}^{\,i}_{\ ,k} = -\Gamma^i_{mk}\vec{g}^{\,m}$$

4- Pour le calcul des symboles de Christoffel, on peut soit reprendre la définition, soit utiliser la formule ci-après : $$\Gamma^m_{ki} = \frac{1}{2} g^{mn}\left(g_{nk,i} + g_{ni,k} - g_{ik,n}\right)$$

5- Les symboles de Christoffel ne constituent pas une suite tensorielle.
La formule de changement de base est la suivante :

$$\Gamma^J_{IK} = a^i_I a^k_K b^J_j \Gamma^j_{jk} + b^J_i \frac{\partial a^j_I}{\partial u^k}$$

Dérivée covariante

Dérivée covariante d'un vecteur

Soit un vecteur A donné par ses composantes contravariantes dans une base curviligne :

$$\vec{A} = A^i \vec{g}_i$$

On veut calculer la variation du vecteur par rapport à une des variables du système de coordonnée :

$$\vec{A}_{,j} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial u^j} = \frac{\partial A^i}{\partial u^j} \vec{g}_i + A^i \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial u^j} = A^i{}_{,j} \vec{g}_i + A^i \Gamma^m_{ji} \vec{g}_m = A^i{}_{,j} \vec{g}_i + A^m \Gamma^i_{jm} \vec{g}_i$$

On obtient ainsi :

$$\vec{A}_{,j} = \left(A^i_{,j} + A^m \Gamma^i_{jm}\right)\vec{g}_i = \nabla_j A^i \vec{g}_i$$

On fait donc apparaître un nouvel opérateur différentiel que l'on appelle la *dérivée covariante* du vecteur. Cette dérivée prend en compte la variation propre des composantes du vecteur $\left(\frac{\partial A^i}{\partial u^j}\right)$ et les variations des vecteurs de base $\left(A^m \Gamma^i_{jm}\right)$.

A partir des formules précédentes, on peut écrire :

$$\mathrm{d}\vec{A} = \vec{A}_{,j} \mathrm{d}u^j = \nabla_j A^i \mathrm{d}u^j \vec{g}_i$$

Dérivée covariante d'un tenseur du second ordre

On se donne un tenseur du second ordre par ses composantes contravariantes dans une base curviligne :

$$\mathbb{T} = t^{ij} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j$$

Calculons la variation de ce tenseur par rapport à l'une des variables :

$$\mathbf{T}_{,k} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^k} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial u^k}\left(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j\right) + t^{ij}\left(\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial u^k} \otimes \vec{g}_j\right) + t^{ij}\left(\vec{g}_i \otimes \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial u^k}\right)$$

$$= \frac{\partial t^{ij}}{\partial u^k}\left(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j\right) + t^{ij}\left(\Gamma^m_{ik} \vec{g}_m \otimes \vec{g}_j\right) + t^{ij}\left(\vec{g}_i \otimes \Gamma^m_{jk} \vec{g}_m\right)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \mathbb{T}}{\partial u^k} = \left(\frac{\partial t^{ij}}{\partial u^k} + t^{mj}\Gamma^i_{mk} + t^{im}\Gamma^j_{mk}\right)\left(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j\right)$$

On peut ainsi exprimer la différentielle du tenseur :

$$\mathrm{d}\mathbb{T} = \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial u^k}\mathrm{d}u^k = \left(\frac{\partial t^{ij}}{\partial u^k} + t^{mj}\Gamma^i_{mk} + t^{im}\Gamma^j_{mk}\right)\mathrm{d}u^k\left(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j\right)$$

Les relations précédentes font apparaître la suite indicielle suivante :

$$\nabla t^{ij} = \nabla_k t^{ij} \, \mathrm{d}u^k = \left(\frac{\partial t^{ij}}{\partial u^k} + t^{mj}\Gamma^i_{mk} + t^{im}\Gamma^j_{mk} \right) \mathrm{d}u^k$$

Dans le cas d'un tenseur donné par ses composantes mixtes, on a :

$$\nabla t^i_{\ j} = \nabla_k t^i_{\ j} \, \mathrm{d}u^k = \left(\frac{\partial t^i_{\ j}}{\partial u^k} + t^m_{\ j}\Gamma^i_{mk} - t^i_{\ m}\Gamma^m_{jk} \right) \mathrm{d}u^k$$

La différentielle $d\mathbb{T}$ d'un tenseur est la différence, à l'ordre 1, de deux tenseurs du même type. C'est donc un tenseur de ce type et la suite indicielle obtenue est par conséquent tensorielle.

Mais de plus on a :

$$\nabla t^{ij} = \nabla_k t^{ij} \, \mathrm{d}u^k$$

Les termes $\mathrm{d}u^k$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre 1 (le vecteur $\mathrm{d}\vec{M}$). En conséquence la suite $\nabla_k t^{ij}$ est tensorielle. Elle définit un nouveau tenseur.

La suite $\nabla_k t^{ij}$ définit un nouveau tenseur contenant une variance de plus que le tenseur $\mathbb{T}$. Ce nouveau tenseur est appelé *la dérivée covariante du tenseur* $\mathbb{T}$. On le note souvent $\nabla\mathbb{T}$.

La dérivée covariante d'un tenseur d'ordre *n* est un tenseur d'ordre *n+1*.

Il ne faut pas confondre la dérivée covariante d'un tenseur avec la différentielle du tenseur. Par exemple, pour un tenseur d'ordre 3, on a :

$$\mathbb{T} = t^{ij}_k \left(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes g^{*k} \right)$$
$$\mathrm{d}\mathbb{T} = \nabla t^{ij}_k \left(\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes g^{*k} \right)$$
$$\nabla\mathbb{T} = \nabla_l t^{ij}_k \left(g^{*l} \otimes \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes g^{*k} \right)$$

Théorème de RICCI: Les dérivées covariantes du tenseur fondamental sont toutes nulles, quel que soit le système de référence.

L'intérêt essentiel de ce théorème réside dans le fait qu'il rend permutable la dérivation covariante et le relèvement ou l'abaissement des indices. Ainsi on peut écrire :

$$\nabla t^{ij} = \nabla\left(g^{ik} t^{\ j}_k \right) = g^{ik} \nabla t^{\ j}_k$$

Application à la dynamique.

Vitesse d'un mobile

Quand un mobile ponctuel M décrit une trajectoire dans l'espace, on peut repérer la position de ce mobile en paramétrant ses coordonnées en fonction du temps :

$$u^i = u^i(t)$$

La vitesse du mobile par rapport à un repère est définie par le vecteur $\vec{V} = \mathrm{d}\vec{M} / \mathrm{d}t$ où $\mathrm{d}\vec{M}$ est le déplacement de M dans la repère considéré pendant le temps $\mathrm{d}t$. Déterminons la vitesse de M par rapport à un **repère fixe au cours du temps**, c'est à dire un repère associé à un système de coordonnées (rectilignes ou curvilignes) mais qui reste immobile par rapport à l'observateur. Il ne faut pas confondre ce repère avec la base fixe (constante dans l'espace) d'un repère cartésien.

Ecrivons la vitesse en utilisant tout d'abord les coordonnées rectilignes :

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}x^i}{dt}\vec{e}_i \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}x^i\vec{e}_i$$

Les composantes de la vitesse sont les dérivées partielles par rapport au temps des coordonnées de M.

Calculons maintenant cette même vitesse par rapport au repère fixe, mais en utilisant les coordonnées curvilignes :

$$\vec{g}_i = \frac{\partial\vec{M}}{\partial u^i} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{du}^{\mathrm{i}}\vec{g}_i$$

On obtient donc :

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}u^i}{dt}\vec{g}_i$$

Les composantes de cette vitesse sont encore les dérivées par rapport au temps des coordonnées de M. Cette propriété est due uniquement à la définition des vecteurs des coordonnées curvilignes.

<u>Accélération du mobile</u>

L'accélération dans le même repère est définie par $\vec{\gamma} = \mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}/\mathrm{d}t$.

Dans les coordonnées rectilignes, on obtient :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{dt}\vec{e}_i\right) = \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_i$$

Avec les coordonnées curvilignes :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{V}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u^i}{dt}\vec{g}_i\right) = \frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}t^2}\vec{g}_i + \frac{\mathrm{d}u^i}{dt}\frac{\mathrm{d}\vec{g}_i}{\mathrm{d}t}$$

Au cours du temps dt la base naturelle du point où se trouve le mobile varie :

$$\mathrm{d}\vec{g}_i = \Gamma^j_{ki}\mathrm{d}u^k\vec{g}_j$$

Ce qui nous donne :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}t^2}\vec{g}_i + \frac{\mathrm{d}u^i}{dt}\Gamma^j_{ki}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\vec{g}_j = \left(\frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u^j}{dt}\Gamma^i_{kj}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\right)\vec{g}_i$$

Les composantes de l'accélération sont donc :

$$\gamma^i = \frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u^j}{dt}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t}\Gamma^i_{kj}$$

Opérateurs gradient et divergence

Pour définir ces opérateurs dans un système de coordonnées curvilignes, on reprend, en le transformant, l'opérateur Nabla :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^i}e^{*i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial u^i}g^{*i}$$

On obtient alors pour le gradient d'un vecteur :

$$\mathrm{Grad}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}g^{*i}\right)\otimes\left(v^k\vec{g}_k\right) = g^{*i}\otimes\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\vec{g}_k + v^k\frac{\partial\vec{g}_k}{\partial u^i}\right)$$

Soit :

$$\mathrm{Grad}(\vec{V}) = g^{*i}\otimes\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\vec{g}_k + v^k\Gamma^m_{ik}\vec{g}_m\right) = g^{*i}\otimes\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\vec{g}_k + v^m\Gamma^k_{im}\vec{g}_k\right) = \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + v^m\Gamma^k_{im}\right)\left(g^{*i}\otimes\vec{g}_k\right)$$

On retrouve ainsi la dérivée covariante :

$$\mathrm{Grad}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + v^m \Gamma^k_{im}\right)\left(g^{*i} \otimes \vec{g}_k\right) = \nabla_i v^k \left(g^{*i} \otimes \vec{g}_k\right)$$

En fait on montre qu'il est possible de transposer les formules démontrées en coordonnées rectilignes en remplaçant la dérivation $(,i)$ par une dérivation covariante (∇_i).

On a ainsi pour l'opérateur divergence :

$$\mathrm{div_d}(\mathbb{T}) = \nabla_k t^{jk} \vec{e}_j \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div_g}(\mathbb{T}) = \nabla_k t^{kj} \vec{e}_j$$

EXERCICES sur les Tenseurs

Convention d'écriture

47- En adoptant la convention d'Einstein, a-t-on le droit d'écrire les formules suivantes ?

47-1 $g_{ij} x^i x^j + h_{rs} x^r x^s = \left(g_{ij} + h_{ij}\right) x^i x^j$

47-2 $a_{ij} x^i + b_{rs} x^s = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) x^i$

47-3 $a_{ij} b^{jk} c_{kl} = a_{ir} b^{rs} c_{sl}$

47-4 $\left(a^i b_i\right)^2 \left(c^i d_i\right)^2 = \left(a^i c^i\right)^2 \left(b_i d_i\right)^2$

47-5 $a_i^3 \left(b_3^i + c_3^i\right) = a_i^3 b_3^i + a_k^3 c_3^k$

48- Les produits $x^i x^j$ étant commutatifs, démontrer l'égalité :

$$\left(2a_{ijh} - a_{hij}\right) x^i x^j = \left(a_{ijh} + a_{jih} - a_{hij}\right) x^i x^j$$

49- Résoudre l'équation :

$$\delta^i_j x^j x_i x^k = \delta^i_k x^j x_i x^k$$

50- Calculer les dérivées suivantes :

50-1 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a_i b_j c^k\right)$ 50-2 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a_{ij} b^j + c_{ij} d^j\right)$

50-3 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta_{ij} a^i a^j\right)$ 50-4 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta_{ij} \delta^{jk} a^i b_k\right)$

51- Calculer les dérivées partielles suivantes :

51-1 $\left(A_{ij} x^i x^j\right)_{,k}$ 51-2 $\left(A_{ijh} x^i x^j x^h\right)_{,k}$

51-3 $\left(A_{ij}x^i x^j\right)_{,kl}$ 51-4 $\left(A_{ijh}x^i x^j x^h\right)_{,kl}$

52- Soit $\mathrm{d}a_i = A^j_{ki}a_j \mathrm{d}y^k$. Exprimer $a_{i,k}$

53- Soit $A^k_{ij} = \dfrac{\partial a_k}{\partial y^i} + \dfrac{\partial a_k}{\partial y^j} = a_{k,i} + a_{k,j}$.. Calculer $\left(A^k_{ij}\right)_{,l}$

54- Ecrire la trace d'une matrice A en utilisant la convention d'Einstein.

Espaces affines. Espaces métriques

55- On considère l'espace vectoriel euclidien. On associe à cet espace une base cartésienne orthonormée directe $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$.

Soient $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$ et $\vec{b} = b^i \vec{e}_i$ deux vecteurs de cet espace.

55-1 Exprimer en formulation indicielle le produit scalaire et le produit vectoriel de ces deux vecteurs.

La position d'un point M quelconque est repéré par rapport à une origine O par le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x^i\, \vec{e}_i$$

Soit $p\left(x^i\right)$ une fonction scalaire des coordonnées de M et $\vec{f}\left(x^i\right)$ une fonction vectorielle.

55-2 Exprimer en formulation indicielle les opérateurs gradient, divergence, laplacien et rotationnel.

55-3 Donner une nouvelle expression de $\mathrm{div}\left(p.\vec{f}\right)$.

Algèbre tensorielle en espace affine

56- Soit une base $\left(\vec{e}_i\right)$ de $\mathbf{R^3}$ et f une forme linéaire définie par :

$$f\left(\vec{e}_1\right) = 1,\ f\left(\vec{e}_2\right) = -1,\ f\left(\vec{e}_3\right) = 2$$

56-1 Calculer $f\left(\vec{v}\right)$ avec $\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$

56-2 Quelles sont les composantes de f dans la base duale associée? Utiliser ces composantes pour retrouver $f\left(\vec{v}\right)$.

56-3 En utilisant les matrices de changement de base adéquates, écrire les nouvelles composantes de $\vec{v}$, de f et calculer $f\left(\vec{v}\right)$ avec ces nouvelles composantes dans le changement de base :

$\vec{E}_1 = -\vec{e}_1$, $\vec{E}_2 = -\vec{e}_2$, $\vec{E}_3 = \vec{e}_3$

57- Démontrer que la forme quadratique $A_{ij}x^i x^j$ est nulle si le tenseur A_{ij} est antisymétrique.

58- Si les grandeurs ci-après représentent des tenseurs, montrer que les propriétés suivantes sont conservées au cours de tout changement de repère :

56-1 $A_{ij} = A_{ji}$ 56-2 $A_{ij} = -A_{ji}$

56-3 $A_{ij} = kA_{ji}$ 56-4 $A_{ij} = \alpha A_{ji} + \beta B_{ij}$

59- A quelle condition doivent satisfaire deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ d'un même espace vectoriel E_n pour que l'on ait :

$$\vec{V} \otimes \vec{V}' = \vec{V}' \otimes \vec{V}$$

60- Démontrer que la suite δ_{ij} n'est pas une suite tensorielle.

61- 1- Soit $\left(t^i{}_j\right)$ une suite tensorielle sur E_n. Comment se transforme le déterminant de cette suite dans un changement de base?

2- Même question pour une suite tensorielle $\left(t_{ij}\right)$ ou $\left(t^{ij}\right)$?

62- On se donne trois suites indicées , fonction de la base choisie dans $\mathbf{R^2}$ et on explicite leurs composantes dans deux bases $\left(\vec{e}_i\right)$ et $\left(\vec{E}_I = a_I^i \vec{e}_i\right)$ avec :

$$\left(a_I^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ces composantes sont dans la base $\left(\vec{e}_i\right)$

$$\begin{cases} c_{ij} = \left(c_{11} = 0; c_{12} = 2; c_{21} = 0; c_{22} = 1\right) \\ c^i{}_j = \left(c_1^1 = 0; c^1_2 = 2; c^2_1 = 0; c^2_2 = 1\right) \\ c_{ij} = \left(c_{11} = 2; c_{12} = 0; c_{21} = 1; c_{22} = 0\right) \end{cases}$$

Et dans la base $\left(\vec{E}_I\right)$

$$\begin{cases} C_{IJ} = \left(C_{11} = 0; C_{12} = -4; C_{21} = 0; C_{22} = 4\right) \\ C^I{}_J = \left(C_1^1 = 0; C^1_2 = -4; C^2_1 = 0; C^2_2 = 1\right) \\ C_{IJ} = \left(C_{11} = 2; C_{12} = 0; C_{21} = -2; C_{22} = 1\right) \end{cases}$$

Quelles sont les suites qui peuvent être tensorielles? Peut-on affirmer qu'elles le sont?

63- Démontrer qu'un tenseur quelconque ayant au moins une paire d'indice de même hauteur peut être décomposé d'une manière unique en une somme de deux tenseurs, l'un symétrique, l'autre antisymétrique par rapport aux deux indices choisis.

64- On se donne un tenseur mixte d'ordre 2, $t^i{}_j$, en définissant ses composantes dans une base $\left(\vec{e}_i\right)$ de $\mathbf{R^2}$. On a :

$$t_1^1 = 1\ ;\ t_2^1 = 2 = t_1^2\ ;\ t_2^2 = 3$$

D'autre part on se donne une seconde base $\left(\vec{E}_I\right)$ se déduisant de la première à l'aide de la matrice $\left(a_I^i\right)$:

$$a_1^1 = 1\ ;\ a_2^1 = -1\ ;\ a_1^2 = 2\ ;\ a_2^2 = 2$$

64-1 Déterminer les nouvelles composantes $T^I{}_J$ du tenseur.

64-2 Le tableau $t^i{}_j$ représente maintenant les composantes du tenseur symétrique deux fois covariant t_{ij}. Calculer les composantes de ce tenseur dans la nouvelle base.

65- On se donne un tenseur deux fois contravariant sur $\mathbf{R^2}$ par ses composantes dans une base :

$$t^{11}=2\ ;\ t^{12}=3\ ;\ t^{21}=1\ ;\ t^{22}=4$$

65-1 Ecrire ce tenseur sous la forme $t^{ij}=s^{ij}+a^{ij}$ où s^{ij} et a^{ij} sont deux tenseurs deux fois contravariant l'un symétrique et l'autre antisymétrique.

65-2 Trouver les nouvelles composantes T^{IJ}, S^{IJ} et A^{IJ} dans la nouvelle base définie par le changement de base de l'exercice précédent.

66- Soit le tenseur $A_{ijk}=u_k a_{ij}+u_i a_{jk}-u_j a_{ik}$. Montrer que ce tenseur est symétrique si le tenseur a_{ij} est symétrique.

Opérations sur les tenseurs

67- On se donne une base $(\vec{e}_i)$ de $\mathbf{R^2}$ dans laquelle le tenseur fondamental a pour composantes :

$$g_{11}=2\ ;\ g_{12}=-1\ ;\ g_{21}=-1\ ;\ g_{22}=1$$

On détermine un tenseur $t^i{}_{jk}$ par la donnée de ses composantes dans $(\vec{e}_i)$:

$$\begin{cases} t^1_{11}=0; t^1_{12}=1; t^1_{21}=-1; t^1_{22}=-2 \\ t^2_{11}=3; t^2_{12}=0; t^2_{21}=-2; t^2_{22}=-4 \end{cases}$$

Déterminer $u_k=t^i{}_{ik}, v_k=t^i{}_{ki}, v^k$ et $u_i v^i$.

68- Dans l'espace $\mathbf{R^2}$ de la géométrie élémentaire, une première base est formée par les vecteurs unitaires d'un repère rectangulaire $(O;\vec{x},\vec{y})$. On considère une deuxième base formée par les vecteurs unitaires de $(O;\vec{x})$ et de la première bissectrice.

Calculer explicitement les nouvelles composantes en fonction des anciennes :

68-1 pour un vecteur (u^i).

68-2 pour un tenseur mixte d'ordre 2 $(t^i{}_j)$. On utilisera éventuellement le contracté $(v^j=t_i^j u^i)$.

69- On considère une suite $(t^i{}_j)$ dans une base $(\vec{e}_i)$ et deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ arbitraires. Démontrer les critères de tensorialité suivants :

69-1 Pour que la suite $(t^i{}_j)$ soit tensorielle, il faut et il suffit que la forme bilinéaire $t^i{}_j u_i v^j$ soit invariante dans tout changement de base.

69-2 Pour que la suite $(t^i{}_j)$ soit tensorielle, il faut et il suffit que les nombres $t^i{}_j v^j$ soient les composantes d'un vecteur.

Algèbre tensorielle en espace métrique

70- On se donne le tenseur fondamental sur $\mathbf{R^2}$:

$$g_{11}=2 \ ; \ g_{12}=-1 \ ; \ g_{21}=-1 \ ; \ g_{22}=1$$

Soit deux vecteurs :

$$\vec{U}=\vec{e}_1-\vec{e}_2 \qquad \vec{V}=-\vec{e}_1$$

70-1 Déterminer leurs composantes covariantes, puis les quantités $\vec{U}.\vec{V}, \left(\vec{U}\right)^2, \left(\vec{V}\right)^2$.

70-2 On effectue un changement de base défini par

$$a_1^1=0 \ ; \ a_2^1=1 \ ; \ a_1^2=-1 \ ; \ a_2^2=1$$

Calculer les nouvelles composantes du tenseur fondamental, puis les nouvelles composantes covariantes et contravariantes des deux vecteurs et les quantités $\vec{U}.\vec{V}, \left(\vec{U}\right)^2, \left(\vec{V}\right)^2$.

71- On se donne le tenseur fondamental sur $\mathbf{R^2}$:

$$g_{11}=2 \ ; \ g_{12}=-1 \ ; \ g_{21}=-1 \ ; \ g_{22}=1$$

71-1 Déterminer les composantes contravariantes de ce tenseur.

71-2 Elever le premier indice de g_{ij} et abaisser le deuxième indice de g^{ij}.

71-3 Soit le changement de base $\vec{E}_I=a_I^i\vec{e}_i$ déterminé par la matrice :

$$a_1^1=0 \ ; \ a_2^1=1 \ ; \ a_1^2=-1 \ ; \ a_2^2=1$$

Déterminer les nouvelles composantes covariantes et contravariantes du tenseur fondamental et effectuer les mêmes opérations que précédemment.

72- Dans l'espace E_3 de la géométrie élémentaire on détermine un vecteur quelconque par ses composantes (x, y,z) suivant une certaine base.

Considérons la loi de multiplication scalaire définie par :

$$\vec{V}.\vec{V}'=2xx'+8yy'+8zz'+2xy'+2yx'+6yz'+6zy'+3zx'+3xz'$$

72-1 Déterminer la figure formée par les vecteurs de base.

72-2 Calculer les composantes covariantes d'un vecteur en fonction de ses composantes contravariantes.

72-3 Orthogonaliser l'espace E_3.

73- Toujours dans l'espace E_3 de la géométrie élémentaire, on considère la loi de multiplication scalaire définie par :

$$\left(\vec{V}\right)^2=x^2+3y^2+2z^2+4yz+6zx+4xy$$

Orthogonaliser l'espace E_3. Que peut-on dire?

Dérivation en notation tensorielle

74- On se donne le tenseur fondamental sur $\mathbf{R^3}$:

$$g_{11}=2 \ ; \ g_{12}=-1 \ ; \ g_{13}=0 \ ; \ g_{22}=1 \ ; \ g_{23}=0 \ ; \ g_{33}=1$$

Soit le changement de base $\vec{E}_I=a_I^i\vec{e}_i$ déterminé par la matrice :

$$a_1^1=0 \ ; \ a_2^1=1 \ ; \ a_3^1=0 \ ; \ a_1^2=-1 \ ; \ a_2^2=1 \ ; \ a_3^2=0 \ ; \ a_1^3=0 \ ; \ a_2^3=0 \ ; \ a_3^3=1$$

74-1 On se donne dans le repère $\left(O,\vec{e}_i\right)$ le champ scalaire suivant :

$$f(M)=\sqrt{2(x^1)^2-2x^1x^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$$

Déterminer le vecteur gradient $\vec{U}(M)$ de f par ses composantes dans $\left(\vec{e}_i\right)$, puis dans $\left(\vec{E}_I\right)$

74-2 Calculer dans les bases la divergence du champ vectoriel obtenu.

74-3 Calculer dans les deux bases le laplacien de $1/f(M)$.

75- On introduit les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x^1 = u^1\cos u^3 \sin u^2 \\ x^2 = u^1 \sin u^3 \sin u^2 \\ x^3 = u^1 \cos u^2 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} u^1 = r \\ u^2 = \theta \\ u^3 = \varphi \end{cases} \begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi[\end{cases}$$

75-1 Déterminer en chaque point M la base naturelle curviligne $\left(\vec{g}_i\right)$.

75-2 Ecrire la matrice de passage entre la base rectiligne $\left(\vec{e}_i\right)$ et la base curviligne $\left(\vec{g}_i\right)$. Déterminer la matrice inverse.

75-3 Déterminer les coefficients de Christoffel associés aux coordonnées sphériques.

75-4 On se donne un champ de vecteur défini en chaque point comme le vecteur unitaire du rayon vecteur :

$$\vec{V}(M)=\frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

Déterminer en M les composantes de $\vec{V}(M)$ sur les deux bases.

En considérant un point M' infiniment proche du point M $\left(\overrightarrow{MM'}=\mathrm{d}x^i\vec{e}_i\right)$, déterminer au premier ordre les composantes de $\mathrm{d}\vec{V}=\vec{V}(M')-\vec{V}(M)$ sur la base rectiligne.

En utilisant la matrice de changement de base, déterminer les composantes de $\mathrm{d}\vec{V}$ dans la base curviligne au point M. Que constate-t-on?

75-5 Exprimer dans la base curviligne les composantes du vecteur gradient d'un scalaire *p*.

75-6 Exprimer, en fonction de ses composantes contravariantes curviligne, la divergence d'un vecteur.

Bibliographie

J. BAHUAUD	Notes de cours de mécanique des milieux continus	INSA Lyon 1983
L. BRILLOUIN	Les tenseurs en mécanique et en élasticité	Ed. Masson 1949
F. BUREAU	Calcul vectoriel et calcul tensoriel	Ed. Université de Liège
A.J. McCONNEL	Applications of tensor analysis	Ed. Dover Publications (Lavoisier) 1931
M. DENIS-PAPIN A. KAUFMANN	Cours de calcul tensoriel appliqué	Ed. Albin Michel 1966
V. DRIVAS L. ROSENTHAL Y. SEMEZIS	La pratique des tenseurs	Ed. Eyrolles 1987
C. JEANPERRIN	Initiation progressive au calcul tensoriel	Ed. Marketing 1987
J.N. GENCE	Introduction au calcul tensoriel	E.C.L. 1983
R. GOUYON	Calcul tensoriel	Ed. Vuibert 1963
J. LELONG-FERRAND J.M. ARNAUDIES	Cours de mathématiques	Ed. Dunod 1978
A. LICHNEROWICZ	Eléments de calcul tensoriel	Ed. Jacques Gabay 1987
A. LICHNEROWICZ	Algèbre et analyses linéaires	Ed. Masson 1970
E. RAMIS	Exercices d'algèbre	Ed. Masson 1974
J. RIVAUD	Exercices d'algèbre Exercices d'algèbre linéaire	Ed. Vuibert 1982
J. QUINET	Cours élémentaire de mathématiques supérieures	Ed. Dunod 1976
J. WINOGRADZKI	Les méthodes tensorielles de la physique	Ed. Masson 1979

Recueil de normes françaises — AFNOR 1983

NF X 02-003 Principes de l'écriture des nombres, des grandeurs, des unités et des symboles
NF X 02-101 Signes et symboles - Algèbre et analyse élémentaire - Géométrie analytique et analyse vectorielle
NF X 02-103 Unités et symboles - Symboles de la mécanique rationnelle
NF X 02-110 Symboles et vocabulaire du calcul matriciel
NF X 02-111 Symboles et vocabulaire du calcul tensoriel
NF X 20-114 Symboles et vocabulaire du calcul ensembliste
NF X 20-116 Symboles et vocabulaire relatifs aux structures algébriques
NF X 20-117 Symboles et vocabulaire relatifs à l'algèbre linéaire